COMPTES RENDUS

DES SÉANCES

DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 8 MAI 1899,

PRÉSIDENCE DE M. VAN TIEGHEM.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE. — *Sur la mesure absolue du temps, déduite des lois de l'attraction universelle.* Note de M. G. LIPPMANN.

« 1. Les mesures dites *absolues* sont ainsi nommées par opposition aux mesures arbitraires, seules autrefois employées en Physique. Mesurer une grandeur en valeur arbitraire, c'est prendre le rapport de cette grandeur à une grandeur de même espèce arbitrairement choisie pour unité. Mesurer une grandeur en valeur absolue, c'est calculer sa valeur en fonction des paramètres qui la déterminent et qui sont d'une autre nature que la grandeur à mesurer; en d'autres termes, la valeur absolue d'une grandeur x est donnée par une équation

$$x = f(\alpha, \beta, \gamma, \ldots),$$

dont le second membre ne contient aucun coefficient arbitraire, et ne dépend que des paramètres α, β, γ, ... qui sont d'une autre nature que x.

» C'est ainsi que l'aire d'un rectangle est déterminée si l'on se donne deux paramètres linéaires α, β, hauteur et base du rectangle; de même une force est déterminée si l'on se donne une masse m et l'accélération $\frac{d^2x}{dt^2}$ que la force lui imprime. Les produits $\alpha\beta$ et $m\frac{d^2x}{dt^2}$ sont les mesures absolues de l'aire et de la force.

» 2. L'unité de temps en usage, la seconde, ne fournit qu'une mesure arbitraire du temps, car la durée du phénomène à mesurer n'est pas déterminée par la durée du mouvement diurne de la Terre. Si l'on donne, par exemple, la durée de la révolution d'un satellite de Jupiter en secondes, on ne fait qu'indiquer le rapport des durées de deux phénomènes indépendants l'un de l'autre, la révolution du satellite et la rotation de la Terre, et le rapport de deux grandeurs indépendantes l'une de l'autre est une mesure arbitraire.

» Pour mesurer en valeur absolue la durée d'un phénomène dû à l'attraction universelle, il suffit de prendre égal à l'unité le coefficient de l'attraction newtonienne, c'est-à-dire de ne pas écrire ce coefficient; on le supprime fréquemment dans les calculs analytiques afin de simplifier l'écriture, sauf à le rétablir quand on passe aux calculs numériques. Il est utile d'en maintenir la suppression dans les calculs numériques : le temps se trouve dès lors mesuré en valeur absolue, en fonction d'une unité dont la grandeur concrète est parfaitement déterminée ([1]).

» On démontre cette proposition en établissant la relation qui existe entre la valeur numérique de la constante newtonienne et la grandeur concrète de l'unité de temps. Cette relation est la suivante : *la valeur numérique de la constante newtonienne est indépendante du choix des unités de longueur et de masse; elle dépend uniquement du choix de l'unité de temps. Inversement, la grandeur de l'intervalle de temps pris pour unité est déterminée sans ambiguïté quand on se donne la valeur numérique de la constante newtonienne qui lui correspond.* Cet énoncé suppose que l'on prenne, comme d'ordinaire, la masse égale au produit du volume par la densité, l'unité de

([1]) Cette unité de temps absolue exprimée en temps moyen vaut 3862 secondes ou $1^h 4^m 22^s$.

volume étant le volume d'un cube qui a l'unité de longueur pour côté, l'unité de densité étant celle d'une substance type telle que l'eau.

» En désignant par k^2 la constante newtonienne, on a les relations connues

$$F = k^2 \frac{Mm}{r^2}, \tag{1}$$

$$F = m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}, \tag{2}$$

F étant la force qui s'exerce entre deux masses M et m, séparées par la distance r, $\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$ étant l'accélération et t le temps exprimé en fonction d'une unité quelconque. En égalant ces deux expressions de la force F, il vient

$$k^2 = \frac{r^2 \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}}{M}.$$

» Cette expression de k^2 est du degré zéro par rapport aux longueurs; car, r et x étant des longueurs, le numérateur est du troisième degré par rapport aux longueurs, et il en est de même du dénominateur, car l'unité de masse varie comme l'unité de volume; k^2 est donc indépendant du choix des unités de longueur et de masse. D'ailleurs, on voit que k^2 est du degré -2 par rapport au temps : donc la valeur numérique de k est proportionnelle à la grandeur de l'unité de temps.

» Comme exemple de ce qui précède, supposons d'abord que l'on emploie le système C.G.S. L'expérience donne $k = \frac{1}{3862}$. Remplaçons ensuite le centimètre par le mètre, et le gramme par la tonne, la valeur numérique de k ne change pas. Il y a donc un intervalle de temps, et un seul, qui donne $k = \frac{1}{3862}$: c'est celui que nous appelons la *seconde*. Ledit intervalle de temps est donc complètement défini par le nombre $\frac{1}{3862}$, bien que ce nombre ne soit pas défini comme le rapport de la seconde à un autre intervalle de temps arbitrairement choisi pour unité. En d'autres termes, imaginons qu'un observateur se soit transporté en un lieu où il ne puisse plus observer le mouvement diurne, qu'il n'ait emporté ni chronomètre réglé, ni même un exemplaire du mètre, mais qu'il ait eu la précaution de noter le nombre $\frac{1}{3862}$ et d'emporter une bouteille d'eau; il ne lui en faudra pas plus pour reconstituer la seconde.

» Il résulte de la proposition démontrée plus haut que, parmi tous les intervalles de temps qu'il est possible de prendre pour unité, il y en a un, et un seul, qui permet de trouver $k = 1$. Supposons-le adopté et appelons θ l'expression du temps ainsi mesuré. Les relations (1) et (2) sont remplacées par les relations plus simples

$$F = \frac{Mm}{r^2}, \tag{3}$$

$$F = m\frac{\partial^2 x}{\partial \theta^2}. \tag{4}$$

» On peut donner des résultats précédents une seconde démonstration, qui a peut-être le défaut d'être trop brève, et qui est la suivante : étant donné le système des relations (1) et (2), où l'unité de temps est quelconque, effectuons un changement d'unité de temps défini par l'équation

$$kt = \theta, \tag{5}$$

θ étant l'expression du temps en fonction de la nouvelle unité. On obtient les relations (3) et (4) qui ne contiennent plus k. D'autre part, l'équation (5) exprime que k est la valeur numérique de l'ancienne unité en fonction de la nouvelle, c'est-à-dire de l'unité qui donne pour la constante newtonienne la valeur numérique 1. Exemple, dans le cas de la seconde, $k = \frac{1}{3862}$; donc la seconde est la $\frac{1}{3862}$ partie de l'unité absolue.

» Il est remarquable que le système des équations (2) et (3) se trouve déterminer par leur seule forme une grandeur concrète, celle de l'unité de temps. C'est ainsi que la base des logarithmes dits *naturels* est définie analytiquement et non choisie *à priori*. Pour définir les logarithmes vulgaires, à base arbitraire, il faut introduire un coefficient, un module, qui est le logarithme naturel de la base arbitraire. De même, dans le problème qui nous occupe, pour rendre l'unité de temps arbitraire, il faut introduire un coefficient k qui est la mesure en valeur absolue de l'unité de temps arbitraire que l'on veut employer. Il est donc permis, par analogie, d'appeler *heure naturelle* l'intervalle de temps qui, pris pour unité, fournit le système des équations (3) et (4). Nous disons heure naturelle, parce que cette unité est voisine de l'heure vulgaire.

» 3. On peut donner de cette unité de temps plusieurs définitions physiques, en appliquant sa définition analytique à une série de cas particuliers. Supposons, par exemple, un point matériel gravitant autour d'une masse M en décrivant une orbite circulaire de rayon a pendant le temps Θ : on a $\Theta = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{M}}$. Si M est la masse d'un cube d'eau qui aurait a pour côté, le radical devient égal à 1 ; le point matériel est, dans ce cas, l'aiguille d'une horloge absolue ; il décrit un arc égal au rayon pendant chaque unité de temps. Il suffit, d'ailleurs, de connaître M et a pour en déduire Θ : d'une manière générale, tout phénomène de gravitation, dont la durée est calculable au moyen des équations (2) et (3), fournit la mesure absolue d'un intervalle de temps.

» Il en est ainsi, en particulier, des oscillations d'un pendule de longueur réduite l. On a, pour la durée d'oscillation, $\Theta = 2\pi\sqrt{\frac{l}{\gamma}}$; γ intensité de la pesanteur est égal à $\frac{M}{a^2}$; M masse de la Terre et a son rayon. M est égal à $\frac{4}{3}\pi a^3 \times 5,5$; 5,5 étant la densité de la Terre : d'où

$$\Theta = 2\pi\sqrt{\frac{1}{\frac{4}{3}\pi . 5,5} \times \frac{l}{a}}.$$

On obtient ainsi la durée absolue d'oscillation en fonction de la longueur du pendule, par le seul calcul ; on sait que la longueur du pendule à secondes n'est déterminable que par l'expérience.

» Veut-on calculer la longueur du pendule qui exécuterait 3600 oscillations pendant une heure naturelle ? Il suffit de résoudre, par rapport à l, l'équation

$$\frac{1}{3600} = 2\pi\sqrt{\frac{1}{\frac{4}{3}\pi 5,5}\,\frac{l}{a}}.$$

On trouve, pour Paris (¹), $l = 1^{m},02960$.

» Bien que l'on puisse ainsi graduer le pendule en valeur absolue et, par conséquent, à la rigueur, se passer de la seconde de temps moyen, il est évidemment préférable de conserver la seconde comme étalon de temps, tout en employant l'unité absolue dans les calculs. Le coefficient de réduction est égal à $\frac{1}{3862}$. On a l'avantage ainsi de pouvoir se servir des horloges en usage, réglées sur le mouvement du Ciel.

» 4. Il reste à indiquer sommairement comment on peut déterminer la

---

(¹) J'ai fait abstraction, pour simplifier les formules données dans le texte, de petites corrections dues à la latitude et à la force centrifuge du mouvement diurne.

valeur de k relative à la seconde. D'abord k est la racine carrée de la constante de l'attraction newtonienne, déterminée par plusieurs auteurs. De plus, l'analyse précédente fait ressortir une propriété de k qui peut servir à déterminer ce nombre d'une autre manière. Calculons la durée d'un mouvement dû à l'attraction newtonienne, oscillation d'un pendule, déplacement d'un astre, etc., en supprimant dans ce calcul la constante newtonienne; puis divisons le résultat de ce calcul par la durée du même phénomène observée en secondes. Le quotient doit être égal à k.

» Ainsi, en appelant M la masse du Soleil, a la moyenne distance de la Terre, on a pour durée calculée de l'année sidérale

$$\Theta = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{M}}.$$

» Le quotient de Θ par les durées de l'année sidérale observée en secondes est $\frac{1}{3862}$, les nombres étant ceux de l'*Annuaire du Bureau des Longitudes*.

» De même, en calculant la durée d'une oscillation du pendule à seconde à l'aide de la formule donnée plus haut

$$\Theta = 2\pi\sqrt{\frac{1}{\frac{4}{3}\pi.5,5}\,\frac{l}{a}},$$

et en divisant Θ par la durée observée en secondes (deux secondes) d'une oscillation double corrigée de l'influence de la force centrifuge du mouvement diurne, on retrouve le même quotient $\frac{1}{3862}$. En réalité, le résultat n'est pas identique; mais la différence numérique ne porte que sur les décimales qui suivent la partie entière 3862.

» En opérant de même sur la Lune, on trouve $\frac{1}{3864}$: la divergence est appréciable; c'est qu'en effet la formule employée, qui est celle des lois de Kepler, n'est plus suffisamment exacte dans le cas de la Lune.

» On peut donc vérifier sous cette forme l'exactitude d'une formule : la valeur qu'elle fournit pour k doit être exacte; c'est une manière de vérifier la concordance de l'observation et du calcul. »